bulunur.

XIII. $X \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in X'$ olmak üzere $u : X \to \mathbb{R}_+$ ve $v : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} u(x) = a > 0$ ve $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} v(x) = b$ sonlu limitleri varsa, $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} u^v = a^b$ dir.

Logaritmik fonksiyonun 3^1) özelliği ve Teorem 2.4.26 dan dolayı

$$\begin{aligned} x \to x_0 \quad \text{iken} \quad \ln u(x) \to \ln a \Rightarrow & v(x) \ln u(x) \to b \ln a \\ & \Rightarrow \lim_{X \ni x \to x_0} u^v = \lim_{X \ni x \to x_0} e^{v \ln u} \\ & = e^{\lim\limits_{X \ni x \to x_0} v.\ln u} = e^{b \ln a} = a^b \\ & = (\lim_{X \ni x \to x_0} u(x))^{\lim\limits_{X \ni x \to x_0} v(x)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

bulunur.

2.5 Çözümlü Problemler

(1) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x \to -3} (3x + 4) = -5$; (b) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 4x) = 12$;

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{10 - x} = 3$; (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x} = 3$.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

(a) $x \in \mathbb{R}$ için $0 < |x + 3| < \delta < 1$ olduğunda

$$|(3x + 4) - (-5)| = 3|x + 3| < 3\delta$$

dır. $3\delta < \epsilon$ dan $\delta < \dfrac{\epsilon}{3}$ bulunur. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon/3\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x + 3| < \delta \Leftrightarrow \ & x \in (-3 - \delta, -3 + \delta) \setminus \{-3\} \\ & \Rightarrow |(3x + 4) - (-5)| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to -3} (3x + 4) = -5$ olur.

(b) $x \in \mathbb{R}$ için $0 < |x - 2| < \delta < 1$ olduğunda

$$|x^2 + 4x - 12| = |(x + 6)(x - 2)| = |x + 6||x - 2| < 9|x - 2| < 9\delta$$

dır. $9\delta < \epsilon$ dan $\delta < \epsilon/9$ bulunur. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon/9\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x-2| < \delta \Leftrightarrow\ & x \in (2-\delta, 2+\delta)\backslash\{0\} \\ \Rightarrow\ & |x^2+4x-12| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x) = 12$ olur.

(c) $x \in \mathbb{R}$ için $0 < |x-1| < \delta < 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} |\sqrt{10-x}-3| &= |\frac{(\sqrt{10-x}-3)(\sqrt{10-x}+3)}{\sqrt{10-x}+3}| = \frac{|1-x|}{\sqrt{10-x}+3} \\ &< \frac{|1-x|}{2\sqrt{2}+3} < \frac{\delta}{2\sqrt{2}+3} \end{aligned}$$

dır. $\dfrac{\delta}{2\sqrt{2}+3} < \epsilon$ dan $\delta < (2\sqrt{2}+3)\epsilon$ bulunur. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, (2\sqrt{2}+3)\epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x-1| < \delta \Leftrightarrow\ & x \in (1-\delta, 1+\delta)\backslash\{1\} \\ \Rightarrow\ & |\sqrt{10-x}-3| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{10-x} = 3$ olur.

(d) $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $|x| < \delta < 1$ olduğunda

$$|\frac{x^2+3x}{x} - 3| = |x+3-3| = |x| < \delta$$

dır. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x| < \delta \Leftrightarrow\ & x \in (-\delta, +\delta)\backslash\{0\} \\ \Rightarrow\ & |\frac{x^2+3x}{x} - 3| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x} = 3$ olur. $\diamond$

(2) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle $f(x) = [\![x]\!] - 2$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a)\quad \lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x) = -2; \qquad (b)\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2;$$
$$(c)\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1; \qquad (d)\quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -1;$$
$$(e)\quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0.$$

Çözüm: (d) ve (e) eşitliklerinin ispatını okuyucuya bırakarak (a), (b) ve (c) eşitliklerinin doğru olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin.
(a)$x \in (1,2)$ için $0 < |x - \frac{1}{3}| < \delta < \dfrac{1}{3}$ olduğunda $[\![x]\!] = 0$ olduğundan,

$$|f(x) - (-2)| = |\,[\![x]\!] - 2 + 2| = |2 - 2| = 0 < \delta$$

dır. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{\dfrac{1}{3}, \epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in (1,2),\quad 0 < |x - \tfrac{1}{3}| < \delta &\Leftrightarrow x \in (\frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta)\backslash\{\frac{1}{3}\} \\ &\Rightarrow |f(x) - (-2)| < \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} f(x) = -2$ olur.
(b) $x \in (0,1)$ için $0 < 1 - x < \delta < 1$ olduğunda $[\![x]\!] = 0$ olduğundan,

$$|f(x) - (-2)| = |\,[\![x]\!] - 2 + 2| = 0 < \delta$$

dır. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (0,1),\quad 0 < 1 - x < \delta \Leftrightarrow x \in (1 - \delta, 1) \Rightarrow |f(x) - (-2)| < \epsilon$$

olduğuna göre, $f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2$ olur.
(c) $x \in (1,2)$ için $0 < x - 1 < \delta < 1$ olduğunda $[\![x]\!] = 1$ olduğundan,

$$|f(x) - (-1)| = |\,[\![x]\!] - 2 + 1| = 0 < \delta$$

dır. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (0,1), \quad 0 < x - 1 < \delta \Leftrightarrow x \in (1, 1+\delta) \Rightarrow |f(x) - (-1)| < \epsilon$$

olduğuna göre, $f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$ olur. $\diamond$

(3) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$; (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{3x+1} = \infty$.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.

(a) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ için $|x| > \delta \geq 1$ olduğunda

$$|\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2|2x+1|} < \frac{1}{2(|2x|-1)} < \frac{1}{2(2\delta - 1)}$$

dir. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \max\{1, \frac{1+2\epsilon}{4\epsilon}\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \quad |x| > \delta \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\delta) \cup (\delta, \infty)$$
$$\Rightarrow |\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{2}| < \epsilon$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$ olur.

(b) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ için $|x| > \delta \geq 1$ olduğunda

$$|\frac{2x^2}{3x+1}| = \frac{2x^2}{|3x+1|} \geq \frac{2x^2}{3|x|+1} > \frac{2x^2}{4|x|} = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}\delta$$

dir. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \max\{1, 2\epsilon\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \quad |x| > \delta \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\delta) \cup (\delta, \infty)$$
$$\Rightarrow |\frac{2x^2}{3x+1}| > \epsilon$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{3x+1} = \infty$ elde edilir. $\diamond$

(4) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a) \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \quad (b) \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty, \quad (c) \quad \lim_{x\to 2} f(x) = \infty.$$

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun.
(a) $x \in (1,2)$ için $2 - x < \delta < 1$ olduğunda

$$f(x) = \frac{1}{x-2} < -\frac{1}{\delta}$$

dir. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \frac{1}{\epsilon}\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (1,2), \quad 0 < 2 - x < \delta \Leftrightarrow x \in (2-\delta, 2) \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ elde edilir.
(b) $x \in (2,3)$ için $x - 2 < \delta < 1$ olduğunda

$$f(x) = \frac{1}{x-2} > \frac{1}{\delta}$$

dir. Buradan, $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \frac{1}{\epsilon}\}$ seçimi yapıldığında

$$x \in (2,3), \quad 0 < x - 2 < \delta \Leftrightarrow x \in (2, 2+\delta) \Rightarrow |f(x)| > \epsilon$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ elde edilir.
(c) (a) ve (b) den görüldğü gibi $\delta = \delta(\epsilon) = \min\{1, \frac{1}{\epsilon}\}$ seçimi yapıldığında

$$\begin{aligned} x \in (1,3), \quad 0 < |x-2| < \delta &\Leftrightarrow x \in (2-\delta, 2+\delta)\backslash\{2\} \\ &\Rightarrow f(x) > \epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ elde edilir. $\diamond$

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için her $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ için Tanım 2.4.6 nın koşullarının sağlanmadığını gösterelim.

$x_n \in \mathbb{Q},\ n = 1, 2, \cdots$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ koşullarını sağlayan (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ ve $x'_n \in I,\ n = 1, 2, \ldots$ ve $\lim_{n\to\infty} x'_n = x_0$ koşullarını sağlayan (x'_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ olduğuna göre, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limiti yoktur. $\diamond$

(6)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \text{ ise;} \\ \dfrac{1-\cos x}{x}, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz. $x = 0$ da limit var mıdır?

Çözüm: Örnek 2.4.25 ten dolayı 0 da sağ ve sol taraflı limitler için

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1, \\ f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2}\Big(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2}\Big(\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t}\Big)^2 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $f(0^-) \neq f(0^+)$ olduğuna göre, $\lim_{x\to 0} f(x)$ limiti yoktur. $\diamond$

(7)

$$f(x) = \begin{cases} mx + n, & x > -1 \text{ ise;} \\ mx + 2, & x < -1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x_0 = -1$ da limitinin olması için m ve n ne olmalıdır.

Çözüm: -1 de sağ ve sol taraflı limitler için

$$f(-1^-) = \lim_{x\to -1^-}(mx+2) = -m+2,$$
$$f(-1^+) = \lim_{x\to -1^+}(mx+n) = -m+n$$

bulunur. Teorem 2.4.12 den dolayı $\lim_{x\to -1} f(x)$ limitinin mevcut olması için $f(-1^-) = f(-1^+)$, yani $-m+2 = -m+n$ koşulu sağlanmalıdır. Buna göre, m herhangi bir reel sayı ve $n=2$ ise $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = -1$ de limiti vardır ve $\lim_{x\to -1} f(x) = -m+2$ dir. $\diamond$

(8) Teorem 2.4.24 (f) den faydalanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} x^2 \sin\tfrac{1}{x};\quad (b)\quad \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}};\quad (c)\quad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\sin\tfrac{1}{x}.$$

Çözüm: **(a)**$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$-x^2 \le x^2 \sin\tfrac{1}{x} \le x^2$$

ve $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ olduğuna göre, $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$ bulunur.
(b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$-|x| \le x\cos\tfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \le |x|$$

ve $\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$ olduğuna göre, $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ bulunur.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$-|\sqrt[3]{x}| \le \sqrt[3]{x}\sin\tfrac{1}{x} \le |\sqrt[3]{x}|$$

ve $\lim_{x\to 0}(-|\sqrt[3]{x}|) = \lim_{x\to 0}|\sqrt[3]{x}| = 0$ olduğuna göre, $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x} = 0$ bulunur. $\diamond$

(9) $f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$ fonksiyonunun limitinin var olmadığı noktaların kümesini bulunuz.

Çözüm: $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $m \leq x < m+1$ $(m-1 \leq x < m)$ olduğunda $[\![x]\!] = m$ $([\![x]\!] = m-1)$ dir. Buna göre,

$$f(m^+) = \lim_{x\to m^+} \sqrt{x - [\![x]\!]} = \lim_{x\to m^+} \sqrt{x-m} = 0$$
$$f(m^-) = \lim_{x\to m^-} \sqrt{x - [\![x]\!]} = \lim_{x\to m^-} \sqrt{x-(m-1)} = 1$$

bulunur. $f(m^-) \neq f(m^+)$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonu $\forall m \in \mathbb{Z}$ noktasında limiti yoktur. $\diamond$

(10) Öyle f ve g fonksiyonları bulunuz ki, Teorem 2.4.24 teki (d) ve (h) önermeleri doğru olmasın.

Çözüm: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları durumunda uygun örnekler Teorem 2.1.9 da gösterilmiştir.

$f(x) = \text{sgn}x$ ve $g(x) = -\text{sgn}x$ fonksiyonları 0 da limiti olmayıp, $f(x)+g(x) = 0$, $f(x).g(x) = -1$ ve $\dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = 0, \quad \lim_{x\to 0}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = -1$$

dir.

$F(x) = x + [\![x]\!]$ ve $G(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonları $\forall m \in \mathbb{Z}$ noktasında limiti olmayıp, $\lim_{x\to m}[F(x) - G(x)] = \lim_{x\to m} x = m$ dir.

$H(x) = \text{sgn}x$ fonksiyonu 0 da limiti olmadığına rağmen $\lim_{x\to 0}|H(x)| = 1$ dir. $\diamond$

(11) $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_0 \neq 0$ reel sayılar ve $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim_{x\to\infty}|P_n(x)| = +\infty$;

(b)
$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty, & a_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & a_0 < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

(c) n çift sayı ise

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty, & a_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & a_0 < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

(d) n tek sayı ise

$$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = \begin{cases} -\infty, & a_0 > 0 \text{ ise;} \\ +\infty, & a_0 < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Çözüm:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$P_n(x) = x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})$$

ve $\lim\limits_{x\to\infty}(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}) = a_0 \neq 0$ olduğuna göre Teorem 2.4.24 (c) den dolayı $\exists\delta > 0$ öyle ki $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > \delta$ için

$$|a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}| > \frac{|a_0|}{2}$$

dir. Buradan, aynı x ler için

$$|P_n(x)| = |x|^n|a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}| > \frac{|a_0|}{2}|x|^n$$

bulunur. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|a_0|}{2}|x|^n = +\infty$ olduğuna göre, Teorem 2.4.24 (e) den dolayı $\lim\limits_{x\to\infty} |P_n(x)| = +\infty$ olduğu anlaşılır.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} P_n(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^n \lim_{x\to+\infty}(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}) \\ &= a_0 \lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & a_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & a_0 < 0 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ çift ise;} \\ -\infty, & n \text{ tek ise} \end{cases}$

olduğuna göre, (c) önermesinin doğruluğu (a) ve (b)'ye benzer şekilde gösterilebilir.$\diamond$

(12) $n, m \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, \ldots, b_m$ reel sayılar $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ ve $a_0.b_0 \neq 0$ olmak üzere $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ olsun. $a = x_0 \in \mathbb{R}$ ve $a = -\infty$, $a = +\infty$, $a = \infty$ durumlarında $\lim\limits_{x\to a} R(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm: $a = x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$ ve $\lim\limits_{x\to x_0} Q_m(x) = Q_m(x_0)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre, $Q_m(x_0) \neq 0$ ise, Teorem 2.4.24 (d) den dolayı

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)} = R(x_0)$$

bulunur. Örneğin, $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3 + 4x^2 - 2x + 1) = 6 \neq 0$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{3x^3 + 4x^2 - 2x + 1} = \frac{1 + 2 + 5}{4 + 3 - 2 + 1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

dir. $Q_m(x_0) = 0$ ve $P_n(x_0) \neq 0$ ise $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = \infty$ dır. Örneğin, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 5x + 6) = 0$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 7x^2 + x - 18}{x^2 - 5x + 6} = \frac{8 + 28 + 2 - 18}{0.(2-3)} = -\frac{20}{0} = -\infty$$

dir. $P_n(x_0) = Q_m(x_0) = 0$ ise, $P_n = (x - x_0)P^{\star}_{n-1}(x)$, $Q_m(x) = (x - x_0)Q^{\star}_{m-1}(x)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P^{\star}_{n-1}(x)}{Q^{\star}_{m-1}(x)}$$

dir. Örneğin,

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3),$$
$$2x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(2x^2 + 3x + 1)$$

$x^2+2x-3=(x-1)(x+3),\ 2x^3+x^2-2x-1=(x-1)(2x^2+3x+1)$ olduğuna göre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^3+x^2-2x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(2x^2+3x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2x^2+3x+1}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

olur. Şimdi, $a=-\infty$ (veya $a=+\infty$ veya $a=\infty$) olmak üzere $\lim\limits_{x\to a}R(x)$ limitini inceleyelim. $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$S(x)=\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}$$

olmak üzere $R(x)=x^{n-m}.S(x)$ ve $\lim\limits_{x\to a}S(x)=\dfrac{a_0}{b_0}$ olduğu açıktır. Buna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}R(x) &= \lim_{x\to a}S(x).\lim_{x\to a}x^{n-m}=\frac{a_0}{b_0}.\lim_{x\to a}x^{n-m}\\ &= \frac{a_0}{b_0}.\begin{cases}1, & n=m \text{ ise;}\\ \lim\limits_{x\to a}x^{n-m}, & n\neq m \text{ ise}\end{cases}\end{aligned}$$

bulunur. $n\neq m$ durumlarında

$$\lim_{x\to-\infty}x^{n-m}=\begin{cases}+\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ise;}\\ -\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ tek ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise}\end{cases}$$

ve

$$\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}=\begin{cases}+\infty, & n>m \text{ ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise}\end{cases}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to-\infty}R(x)=\frac{a_0}{b_0}.\begin{cases}1, & n=m \text{ ise;}\\ +\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ çift ise;}\\ -\infty, & n>m \text{ ve } n-m \text{ tek ise;}\\ 0, & n<m \text{ ise.}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \text{ ise;} \\ +\infty, & n > m \text{ ve } n - m \text{ çift ve } a_0 b_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & n > m \text{ ve } n - m \text{ çift ve } a_0 b_0 < 0 \text{ ise;} \\ \infty, & n > m \text{ ve } n - m \text{ tek ise;} \\ 0, & n < m \text{ ise.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0} \cdot \begin{cases} 1, & n = m \text{ ise;} \\ +\infty, & n > m \text{ ise;} \\ 0, & n < m \text{ ise.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \text{ ise;} \\ +\infty, & n > m \text{ ve } a_0 b_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & n > m \text{ ve } a_0 b_0 < 0 \text{ ise;} \\ 0, & n < m \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0} \cdot \begin{cases} 1, & n = m \text{ ise;} \\ +\infty, & n > m \text{ ve } n - m \text{ çift ise;} \\ \infty, & n > m \text{ ve } n - m \text{ tek ise;} \\ 0, & n < m \text{ ise.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \text{ ise;} \\ +\infty, & n > m \text{ ve } n - m \text{ çift ve } a_0 b_0 > 0 \text{ ise;} \\ -\infty, & n > m \text{ ve } n - m \text{ çift ve } a_0 b_0 < 0 \text{ ise;} \\ \infty, & n > m \text{ ve } n - m \text{ tek ise;} \\ 0, & n < m \text{ ise.} \end{cases}$$

bulunur. $\diamond$

(13) Eğer varsa, aşğıdaki limitleri hesaplayınız.

$(a)\quad \lim_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{|4-x^2|}{|2+x|}};\qquad (b)\quad \lim_{x\to\sqrt{5}}[\![\, x^2-5 \,]\!];$

$(c)\quad \lim_{x\to -4}\dfrac{[\![\, x \,]\!]^2-16}{x+4};\qquad (d)\quad \lim_{x\to 0}([\![\, x \,]\!] + [\![\, x-1 \,]\!]);$

$(e)\quad \lim_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{1}{[\![\, 2x^2+1 \,]\!]};\qquad (f)\quad \lim_{x\to 3}\dfrac{[\![\, 2x- [\![\, x+3 \,]\!] \,]\!]}{x-3};$

$(g)\quad \lim_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{Sgn}(x-1)|x-1|}{x-1};\qquad (h)\quad \lim_{x\to 2}\dfrac{|x-3|}{\mathrm{Sgn}(x-2)^2};$

$(i)\quad \lim_{x\to 0}[\![\, \cos x \,]\!];\qquad (j)\quad \lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}}[\![\, \arcsin x \,]\!];$

$(k)\quad \lim_{x\to -\frac{\sqrt{3}}{2}}[\![\, \arccos x \,]\!].$

Çözüm:

(a)

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{\frac{|4-x^2|}{|2+x|}} = \lim_{x\to -2}\sqrt{\frac{|2-x||2+x|}{|2+x|}} = \lim_{x\to -2}\sqrt{|2-x|} = \sqrt{4} = 2.$$

(b) $\sqrt{5}$ in hemen sağında $[\![\, x^2-5 \,]\!] = 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^+}[\![\, x^2-5 \,]\!] = 0$$

olur. $\sqrt{5}$ in hemen solunda $[\![\, x^2-5 \,]\!] = -1$ olacağından,

$$\lim_{x\to\sqrt{5}^-}[\![\, x^2-5 \,]\!] = -1$$

olur. Sağ ve sol limitler farklı olduğundan, $\sqrt{5}$ noktasında limit yoktur.

(c) $\forall x \neq -4$ için

$$\frac{[\![x]\!]^2 - 16}{x+4} = \frac{([\![x]\!] + 4)([\![x]\!] - 4)}{x+4}$$

olduğu açıktır. -4 ün hemen sağında $[\![x]\!] - 4 = -8$ olacağından,

$$\lim_{x \to -4^+} \frac{[\![x]\!]^2 - 16}{x+4} = \lim_{x \to -4^+} \frac{0(-8)}{x+4} = \lim_{x \to -4^+} 0 = 0$$

olur. -4 ün hemen solunda $[\![x]\!] - 4 = -9$ olacağından,

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{[\![x]\!]^2 - 16}{x+4} = \lim_{x \to -4^-} \frac{1.(-9)}{x+4} = +\infty$$

olur. Sağ ve sol limitler farklı olduğundan, -4 noktasında limit yoktur.

(d) 0 ın hemen sağında $[\![x]\!] = 0$ ve $[\![x-1]\!] = -1$ olacağından,

$$\lim_{x \to 0^+} ([\![x]\!] + [\![x-1]\!]) = \lim_{x \to 0^+} (0 + (-1)) = -1$$

olur. 0 ın hemen solunda $[\![x]\!] = -1$ ve $[\![x-1]\!] = -2$ olacağından,

$$\lim_{x \to 0^-} ([\![x]\!] + [\![x-1]\!]) = \lim_{x \to 0^-} (-1 + (-2)) = -3$$

olur. Sağ ve sol limitler farklı olduğundan, 0 noktasında limit yoktur.

(e) $\frac{1}{3}$ ün hemen sağında (solunda) $[\![2x^2 + 1]\!] = 1$ olacağından,

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{1}{[\![2x^2 + 1]\!]} = 1$$

bulunur.

(f) 3 ün hemen sağında $[\![x+3]\!] = 6$ ve $[\![2x - [\![x+3]\!]]\!] = 0$ olacağından,

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{[\![2x - [\![x+3]\!]]\!]}{x-3} = 0$$

olur. 3 ün hemen solunda $[\![x+3]\!] = 5$ ve $[\![2x - [\![x+3]\!]]\!] = [\![2x-5]\!] = 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[|2x-[|x+3|]|]}{x-3} = 0$$

olur. Buna göre,

$$\lim_{x\to 3} \frac{[\![2x - [\![x+3]\!]]\!]}{x-3} = 0$$

bulunur.

(g)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{Sgn}(x-1)|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1.(x-1)}{x-1} = 1,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{Sgn}(x-1)|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1.(1-x)}{x-1} = 1$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{Sgn}(x-1)|x-1|}{x-1} = 1$$

bulunur.

(h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-3|}{\mathrm{Sgn}x(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-3|}{1} = |-1| = 1,$

(i) Her $x \in (-\pi/2, \pi/2)\backslash\{0\}$ için $[\![\cos x]\!] = 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to 0} [\![\cos x]\!] = 0$$

bulunur.

(j) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nin hemen sağında (solunda) $[\![\arcsin x]\!] = 2$ olacağından,

$$\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} [\![\arcsin x]\!] = \lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} 1 = 1$$

bulunur.

(k) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nin hemen sağında (solunda) $[\![\arccos x]\!] = 2$ olacağından,

$$\lim_{x\to -\frac{\sqrt{3}}{2}} [\![\arccos x]\!] = 2$$

bulunur. ⋄

(14) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \to 0$ iken

(a) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$; (b) $(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \dfrac{x}{n} + o(x)$

eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: **(a)** Binom açılımı formülüne göre,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + \ldots + c_n^n x^n \\ &= 1 + nx + x(c_n^2 x + \ldots + x^{n-1}) \\ &= 1 + nx + \alpha(x).x\end{aligned}$$

dir. Burada $c_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ve

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \lim_{x\to 0}(c_n^2 x + c_n^3 x^2 + \ldots + x^{n-1}) = 0$$

olduğundan, $x \to 0$ iken

$$(1+x)^n = 1 + nx + \alpha(x).x = 1 + nx + o(x)$$

olduğu anlaşılır.

(b) $(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 = t$ dersek $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde, (a)'ya göre $(1+t)^n = 1 + nt + o(t)$ olacağından,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1}{x} &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{nt + o(t)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{n + \frac{o(t)}{t}} = \frac{1}{n + \lim\limits_{t\to 0} \frac{o(t)}{t}} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

olur. 2.4.44 Önermesinden dolayı buradan $x \to 0$ iken

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{x}{n}} \sim 1 \quad \text{veya} \quad (1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{x}{n} + o(x)$$

olduğu anlaşılır. ⋄

(15) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$(a)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; $(b)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

$(c)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$; $(d)\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}$;

$(e)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; $(f)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)^3-(1-3x^2)^4}{3x^2-x^3}$;

$(g)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$; $(h)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;

$(i)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; $(j)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$;

$(k)\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; $(l)\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2})$;

$(m)\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1})$; $(n) a>0$ için $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$;

$(o)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}, (m,n\in\mathbb{N})$; $(p)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\dfrac{5}{x}}}$;

$(r)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$; $(s)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}$;

$(t)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}, (m,n\in\mathbb{N})$; $(u)\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2})$;

$(v)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}, (n\in\mathbb{N}, a>0)$; $(y)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x}, (m,n\in\mathbb{N})$;

$(z)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\,\sqrt[m]{1+bx}-1}$, burada $n,m\in\mathbb{N}$ ve $a>0$ dır.

Çözüm: (a)

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{6-x}-1)(\sqrt{6-x}+1)(3+\sqrt{4+x})}{(3-\sqrt{4+x})(3+\sqrt{4+x})(\sqrt{6-x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{(5-x)(3+\sqrt{4+x})}{(5-x)(\sqrt{6-x}+1)} = \lim_{x\to 5} \frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1} = 3.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25} &= \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1})(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})}{(x^2-25)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{3(5-x)}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{-3}{(x+5)(\sqrt{x+11}+2\sqrt{x-1})} = \frac{-3}{80}.
\end{aligned}$$

(c) $x-1=t$ dersek $x=1+t$ ve $x\to 1 \Leftrightarrow t\to 0$ olur. O halde, Problem 14 (b) den dolayı $t\to 1$ iken $(1+t)^{\frac{1}{3}}-1=\dfrac{t}{3}+o(t)$, $(1+t)^{\frac{1}{5}}-1=\dfrac{t}{5}+o(t)$ olacağından, 2.4.54 önermesinden dolayı

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}} &= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{5}}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{3}+o(t)}{\frac{t}{5}+o(t)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{3}+\frac{o(t)}{t}}{\frac{1}{5}+\frac{o(t)}{t}} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

(d) $$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}-\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}-\frac{2-x}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}.$$

(e) $$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x^4-x)(1+\sqrt{x})}{(1-x)(x^2+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} . \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{1-x} \\
&= \frac{2}{2} \lim_{x\to 1} [-x(x^2+x+1)] = -3.
\end{aligned}$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)^3-(1-3x^2)^4}{3x^2-x^3}$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x^2+3x^4+x^6-(1-12x^2+54x^4-108x^6+81x^8)}{x^2(3-x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{15x^2-51x^4+109x^6-81x^8}{x^2(3-x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{15-51x^2+109x^4-81x^6}{3-x}=\frac{15}{3}=5.
\end{aligned}$$

(g) $\sqrt[5]{32+x}=t$ dersek $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}&=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^5-32}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t^4+2t^3+4t^2+8t+16)}\\
&=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^4+2t^3+4t^2+8t+16}=\frac{1}{80}.
\end{aligned}$$

(h) pay ve payda $\sqrt{x}$ ile bölünürse,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}+\dfrac{5}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+1/x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=1.$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4(1+\frac{1}{x})^2(\frac{3}{x}-7)^2}{x^4(2-\frac{1}{x})^4}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^2(\frac{3}{x}-7)^2}{(2-\frac{1}{x})^4}=\frac{49}{16}.$$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{7}{2}.$$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{(2-\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})} = \frac{1}{4}\ .$$

(n) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

$$= \lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a}) = 2\sqrt{a}\ .$$

(o) $x=1+t$ dersek $x\to 1 \Leftrightarrow t\to 0$ olacağından, (c) 'ye benzer şekilde;

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)^m-1} = \lim_{t\to 0}\frac{nt+o(t)}{mt+o(t)} = \frac{n}{m}$$

bulunur.

(p) $\dfrac{1}{x}=t$ dersek, $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4t}-\sqrt[4]{1+3t}}{1-\sqrt[5]{1-5t}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{4}{3}t+o(4t)-(1+\frac{3}{4}t+o(3t))}{1-(1-\frac{5}{5}t+o(5t))}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(\frac{4}{3}-\frac{3}{4})t+o(4t)-o(3t)}{t-o(5t)} = \frac{4}{3}-\frac{3}{4} = \frac{7}{12}.$$

buluruz. Burada $t\to 0$ iken $o(4t)-o(3t)=o(t)$ ve $-o(5t)=o(t)$ eşitliklerini kullandık. (Bkz. "o"sembolünün özellikleri)

(r) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\mid x\mid\sqrt{4+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}{\mid x\mid\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{5}.$$

(s) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\mid x\mid\sqrt{1+\frac{1}{9x^2}}-x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}{\mid x\mid\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-x^{\frac{4}{5}}\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^4}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{1+\frac{1}{9x^2}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{|x|}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\frac{x^{\frac{4}{5}}}{|x|}\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^4}}}=3$$

bulunur. Burada $x\to\infty$ iken $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\mid x\mid}\to 0$ ve $\dfrac{x^{\frac{4}{5}}}{\mid x\mid}\to 0$ olduğu dikkate alınmıştır.

(t) $x=1+t$ dersek, $x\to 1\Leftrightarrow t\to 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{\sqrt[m]{1+t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{n}+o(t)}{\frac{t}{m}+o(t)}=\frac{m}{n}.$$

(u) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\mid x\mid}{x^2}=0$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}+\sqrt{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+\mid x\mid}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\mid x\mid}}+\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+ \mid x \mid}}{\sqrt{x^2+ \mid x \mid .\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}}}+\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mid x \mid \sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}}}{\mid x \mid \sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}}}+ \mid x \mid}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{\mid x \mid}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}\sqrt{1+\frac{|x|}{x^2}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

(v) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{a}(\sqrt[n]{1+\frac{x}{a}}-\sqrt[n]{1-\frac{x}{a}})}{x}$$

$$= \sqrt[n]{a} \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x}{na}+o(\frac{x}{a})-(1-\frac{x}{na}+o(\frac{-x}{a}))}{x}$$

$$= \sqrt[n]{a} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{na}+o(\frac{x}{a})-o(\frac{-x}{a})}{x} = \frac{2}{na}\sqrt[n]{a}.$$

(y) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{ax}{n}+o(ax)-\frac{bx}{m}-o(bx)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{a}{n}-\dfrac{b}{m})x+o(ax)-o(bx)}{x} = \frac{am-bn}{nm}.$$

(z) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[n]{1+ax}.\sqrt[m]{1+bx}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+\frac{a}{n}x+o(ax)).(1+\frac{b}{m}x-o(bx))-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(\frac{a}{n}+\frac{b}{n})x+\frac{ab}{nm}x^2+(1+\frac{a}{n}x)o(bx)+(1+\frac{b}{m}x)o(ax)+o(ax)o(bx)}$$

$$= \frac{1}{\frac{a}{n}+\frac{b}{m}} = \frac{nm}{am+bn}.$$

(16) $x \to 0$ iken aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\sin \alpha x = \alpha x + o(x)$;

(b) $1 - cosx = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$;

(c) $\tan x = x + o(x)$;

(d) $\ln(1+x) = x + o(x)$;

(e) $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$;

(f) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$;

(g) $\sinh x = x + o(x)$;

(h) $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x)$.

Çözüm: **(a)** $t \to 0$ iken $\sin t \sim t$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

olur. Önerme 2.4.51 den dolayı buradan $x \to 0$ iken $\sin\alpha x = \alpha x + o(x)$ olduğu anlaşılır.

(b) $x \to 0$ iken $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ olduğuna göre, Önerme 2.4.51 den dolayı $x \to 0$ iken $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ dir.

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\cos x}$

$$= 1 \Rightarrow x \to 0 \quad \text{iken} \quad \tan x = x + o(x) \quad \text{dir.}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \Rightarrow x \to 0$ iken $\ln(1+x) = x + o(x)$ dir.

(e) $a^x - 1 = t$ dersek, $x = \log_a(1+t)$ ve $x \to 0 \Leftrightarrow t = 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a} = \frac{1}{\ln a}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{\log_a e} = 1 \Rightarrow x \to 0 \quad \text{iken}$$

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad \text{dir.}$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \Rightarrow x \to 0$ iken $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ dir.

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-(e^{-x}-1)}{x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)-(-x+o(-x))}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x+o(x)-o(-x)}{x}=1\Rightarrow x\to 0 \quad \text{iken}$$

$\sinh x=x+o(x)$ dir.

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sinh^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\Big(\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2$
$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\Big(\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x\to 0$ iken $\cosh x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ dir. $\diamond$

(17) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$(a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}\quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \beta\neq 0)$; $(b)\ \lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}\quad (m,n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0)$;

$(c)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$; $(d)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{x^2-1}$;

$(e)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x}$; $(f)\ \lim\limits_{x\to -1}\frac{x^{20}+x^{19}}{\sin(x+1)}$;

$(g)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$; $(h)\ \lim\limits_{x\to 0}\cos\Big(\frac{\sin x}{2x}\Big)$;

$(i)\ \lim\limits_{x\to 2}\sin\Big(\frac{\pi x}{[|\ \pi x\ |]}\Big)$; $(j)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 4\pi x}$;

$(k)\ \lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$; $(l)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$.

Çözüm: (a) $x\to 0$ iken $\sin\alpha x\sim\alpha x$ ve $\sin\beta x\sim\beta x$ olduğundan, önerme 2.4.54 ten dolayı,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$ ($x-\pi=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to\pi\Leftrightarrow$

$t \to 0$ olur)

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(mt+m\pi)}{\sin(nt+n\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^m \sin mt}{(-1)^n \sin nt}$$

$$= (-1)^{m-n} \lim_{t\to 0} \frac{\sin mt}{\sin nt} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

(c) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{(x^2-4)} \frac{(x^2-4)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2) \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$$

[sağdaki limitte $t = x^2 - 4$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 2 \Leftrightarrow t \to 0$ olur]

$$= \lim_{x\to 2}(x+2) \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = (2+2)1 = 4$$

dir.

(d) $$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x-1} \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x-1} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}$$

soldaki limitte $x - 1$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$ olur ve bu durumda $\tan t \sim t$ olduğundan

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t}. \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = 1\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

olur.

(e) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{(1-\cos x)} . \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}$$

[$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ olduğuna göre sağdaki limitte $t = 1 - \cos x$ değişken deștirmesi yaparsak, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$ olur]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$$

[$x \to 1$ iken $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ olduğundan]

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}$ olur.

(f) $x+1=t$ değişken değştirmesi yaparsak, $x \to -1 \Leftrightarrow t \to 0$ olur ve bu durumda $\sin t \sim t$, $(1-t)^{20} \sim 1-20t$ ve $(1-t)^{19} \sim 1-19t$ olduğundan,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^{20}+x^{19}}{\sin(x+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{(t-1)^{20}+(t-1)^{19}}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1-t)^{20}-(1-t)^{19}}{\sin t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{-20t-(-19t)}{t} = -1 \ .$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ [soldaki limitte $t=\sin x$ değişken değiştirmesi yaparsak $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur]

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.1 = 1$$

olur.

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\dfrac{\sin x}{2x})$ [$t = \dfrac{sinx}{2x}$ değişken değiştirmesi yaparsak $x \to 0 \Leftrightarrow$ $t \to \dfrac{1}{2}$ olur] $= \lim\limits_{t\to \frac{1}{2}} \cos t = \cos \dfrac{1}{2}$.

(i) $2\pi = 2.3,14\cdots = 6,28\cdots$ nin hemen solunda (sağında) $[\![\pi x]\!] =$ 6 olduğundan

$$\lim_{x\to 2} \sin(\frac{\pi x}{[\![\pi x]\!]}) = \lim_{x\to 2} \sin(\frac{\pi x}{6}) = \sin\frac{2\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunur.

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 4\pi x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin \pi(1+t)}{\sin 4\pi(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-\sin \pi t}{\sin 4\pi t} = -\dfrac{1}{4}$.

(k) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)(\pi+x)} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1}{\pi+x}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{x\to \pi} \frac{1}{\pi+x} = \frac{1}{2\pi}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan^2 x}{\sqrt{2}\cos x - 1} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x(\sqrt{2}\cos x - 1)}$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$$

[Sağdaki limitte $x - \dfrac{\pi}{4} = t$ değişken değiştirmesi yaparsak $x \to \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow t \to 0$ olur]

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{t\to 0} \frac{\cos(2t+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2}\cos(t+\frac{\pi}{4})-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{1-\cos t+\sin t}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{t\to 0} \frac{2t}{\frac{t^2}{2}+t} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{t\to 0} \frac{2}{\frac{t}{2}+1} = 4$$

(18) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$(a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos(\frac{2\pi}{3}-x)}{\sqrt{3}-2\cos x}$; $\quad (b)\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

$(c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}$; $\quad (d)\ \lim_{x\to\infty} x^2(\cos\dfrac{1}{x}-\cos 3x)$;

$(e)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{\tan^2 x+1-\cos 2x}$; $\quad (f)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$;

$(g)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\sin^2 2x}$; $\quad (h)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}$;

$(i)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\tan x^2}$; $\quad (j)\ \lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$;

$(k)\ \lim_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; $\quad (l)\ \lim_{x\to a} \dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}, (a\in\mathbb{R}, a\neq n\pi, n\in\mathbb{N})$;

$(m)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\tan x)$; $\quad (n)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 2x-\cos x}$;

(o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}, (n\in\mathbb{N})$

(p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$

(r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Çözüm: (a) $x-\dfrac{\pi}{6} = t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow t \to 0$ olacağından,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}-x)}{\sqrt{3}-2\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{\sqrt{3}-2\cos(t+\frac{\pi}{6})} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{3}(1-\cos t)+\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{3}\frac{t^2}{2}+t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{3}\frac{t}{2}+1} = 1$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}.\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

[$x \to 0^+$ iken $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ve $1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$ olduğundan]

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} x \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$= 0.\frac{1}{1+1} = 0 \ .$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{2\sin^2 x-1} \frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2 x}+\sqrt[3]{\tan x}+1}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2 x}+\sqrt[3]{\tan x}+1}. \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{2\sin^2 x-1}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos x(2\sin^2 x-1)}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos x(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x(\sin x+\cos x)} = \frac{1}{3} \ .$$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{3}{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} 2x^2\sin\frac{1}{x}.\sin\frac{2}{x} = 4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}$

$[\frac{1}{x}=t$ değişken değiştirimini yaparsak, $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$ olur].

$$=4\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\frac{\sin 2t}{2t} = 4\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t} = 4\ .$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\tan^2 x+1-\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\tan^2 x+2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x(\frac{1}{\cos^2 x}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+2}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+2\cos^2 x} = \frac{1}{3}\ .$$

(f) $1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x} = 1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})$

$$=1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x}))$$
$$=1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})+\cos x\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})$$
$$=1-\cos x+\cos x\frac{1-\cos 2x}{1+\sqrt{\cos 2x}}$$
$$+\cos x\sqrt{\cos 2x}\frac{1-\cos 3x}{1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}$$
$$.\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}}.\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)}{x^2}$$

$[x\to 0$ iken $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ 1-\cos 2x\sim\frac{1}{2}4x^2$ ve $1-\cos 3x\sim\frac{1}{2}9x^2$ olduğundan]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}4x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}9x^2}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{1+1}\frac{1}{2}4+\frac{1}{1+1+1}\frac{1}{2}9=3\ .$$

(g) $1-\cos x\cos 2x\cos 3x = 1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\sin^2 2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}\\ &+\lim_{x\to 0}\cos x\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 2x}+\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}\\ &+\lim_{x\to 0}\cos x\cos 2x\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 2x}\end{aligned}$$

[$x\to 0$ iken $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $1-\cos 2x\sim 2x^2$, $1-\cos 3x\sim\frac{9}{2}x^2$ ve $\sin^2 2x\sim 4x^2$ olduğundan]

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{4x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\cos 2x\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2}{4x^2}\\ &=\frac{1}{8}+\frac{2}{4}+\frac{9}{8}=\frac{7}{4}\ .\end{aligned}$$

(h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x+4\sin 5x}{(\sqrt{1+2\sin 3x}+\sqrt{1-4\sin 5x})\sin 6x}$$

[$x\to 0$ iken $\sin 3x\sim 3x, \sin 5x\sim 5x$ ve $\sin 6x\sim 6x$ olduğundan]

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 0}\frac{2.3x+4.5x}{6x(\sqrt{1+2\sin 3x}+\sqrt{1-4\sin 5x})}=\lim_{x\to 0}\frac{26}{6(\sqrt{1+2\sin 3x}+\sqrt{1-4\sin 5x})}\\ &=\frac{26}{6.(1+1)}=\frac{13}{6}\ .\end{aligned}$$

(i) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\tan x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{\tan x^2}$$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\cos 2x}{\tan x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{cos2x}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\tan x^2}\end{aligned}$$

$[x \to 0$ iken $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, 1-\cos 2x \sim 2x^2$ ve $\tan x^2 \sim x^2]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{cos2x}}\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+1}2 = \frac{3}{2}\ .$$

(j) $\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1} = 2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})$

$$\times \sin\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$
$$= 2\cos\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}) \times \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

eşitliğini ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için $|\cos t| \leq 1$ ve $|\sin t| \leq |t|$ olduğunu dikkate alırsak $\forall x \in \mathbb{R}$ için;

$$|\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}| \leq 2\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right|$$
$$\leq 2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

bulunur. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$ olacağından, son eşitsizlikten $\lim\limits_{x\to\infty}|\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}| = 0$ olduğu ve buradan da $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1}) = 0$ bulunur.

(k) $\sin x - \sin a = 2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$
$$= \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

[Sağdaki limitte $\dfrac{x-2}{2} = t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to a \Leftrightarrow t \to 0$ olur] $= \lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin t}{t} = \cos a$.

(l) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos a\cos x}$

$$=\frac{1}{\cos a}\lim_{x\to a}\frac{1}{cosx}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}$$
$$=\frac{1}{\cos a}\lim_{x\to a}\frac{1}{cosx}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{\cos^2 a}\ .$$

(m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\big(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\tan x\big)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x\sin x}{\cos x}$ ($x=t+\dfrac{\pi}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\pi-2(\frac{\pi}{2}+t)\sin(\frac{\pi}{2}+t)}{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\pi(1-\cos t)-2t\cos t}{-\sin t}$$
$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\pi(1-\cos t)}{\sin t}+2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\lim_{t\to 0}\cos t$$
$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\pi\frac{t^2}{2}}{t}+2\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}\lim_{t\to 0}\cos t=0+2=2$$

(n) $x\longrightarrow 0$ iken $1-\cos x=o(x), 1-\cos 2x=o(x), \sin x=x+o(x)$ ve $\sin x=x+o(x)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 2x-\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{2x+o(x)}=\frac{1}{2}$$

(o) $\sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{(\sqrt{1+2x}-1)\sin\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{2x\sin\frac{x}{2}}(\sqrt{1+2x}+1)$$

$[x \to 0$ iken $\sin\frac{n}{2}x \sim \frac{n}{2}x, \ \ \sin\frac{n+1}{2}x \sim \frac{n+1}{2}x]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{n+1}{2}x\frac{n}{2}x}{2x\frac{x}{2}}(\sqrt{1+2x}+1) = \frac{n+1}{2}\frac{n}{2}(1+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(p) $\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a = -2\sin\frac{x}{2}\sin(a+\frac{3x}{2})$
$+ 2\sin\frac{x}{2}\sin(a+\frac{x}{2}) = -4\sin^2\frac{x}{2}\cos(a+x)$olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2} = -\lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 \lim_{x\to 0}\cos(a+x)$$
$$= -\cos a \ .$$

(r) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x} + \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x})$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)} + \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \times \frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} + \frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}(\frac{x}{\sin x})^2\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} + \frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = -\frac{1}{12} \ \diamond$$

(19) $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ olmak üzere $u : X \to \mathbb{R}_+, v : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $\lim_{X\ni x\to x_0} u(x) = 1$ ve $\lim_{X\ni x\to x_0} v(x) = \infty$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{X\ni x\to x_0} u^v = e^{\lim_{X\ni x\to x_0}(u-1)v} \tag{2.16}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $U_{\delta_0}(x_0), x_0$ noktasının herhangi bir komşuluğu olmak üzere $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X$ için $u(x) = 1$ ise, aynı x ler için $u^v = 1^v = 1 \Rightarrow \lim_{X\ni x\to x_0} u^v = 1$ olduğu açıktır.

Şimdi $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X$ için $u(x) \neq 1$ olsun. Bu durumda, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \cap X$ için

$$u^v = ((1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}})^{(u-1)v} = e^{(u-1)v \ln[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}}$$

olduğuna göre, Teorem 2.4.26 dan dolayı

$$\begin{aligned}
\lim_{X \ni x \to x_0} u^v &= e^{\lim\limits_{X \ni x \to x_0} (u-1)v \ln(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}} \\
&= e^{\lim\limits_{X \ni x \to x_0} (u-1)v \lim\limits_{X \ni x \to x_0} \ln(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}} \\
&= [\lim_{X \ni x \to x_0} u = 1 \Rightarrow \lim_{X \ni x \to x_0} \frac{1}{u-1} \\
&= \infty \Rightarrow \lim_{X \ni x \to x_0} (1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}} e] \\
&= e^{\lim\limits_{X \ni x \to x_0} (u-1)v}
\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(20) $a > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x \to 0$ iken $a^x = 1 + x \ln a + o(x) (\Rightarrow x \to 0$ iken $e^x = 1 + x + o(x))$ dir.

(b) $x \to 0$ iken $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ dir.

Çözüm: **(a)** $t = a^x - 1$ değişken değiştirmesi yaparsak, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ olduğuna göre, $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. Bu durumda, $a^x = 1 + t \Rightarrow x = \dfrac{\ln(1+t)}{\ln a} (a \neq 1)$ ve

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t \ln a}{\ln(1+t)} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \ln a$$

bulunur. Buradan, $x \to 0$ iken $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$ bulunur.

(b) $x \to 0$ iken

$$\alpha \ln(1+x) \to 0 \Rightarrow \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} = \frac{\alpha \ln(1+x) + 0(x)}{\alpha \ln(1+x)} \to 1$$

ve $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to 1$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)}.\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha$$

ve buradan da $x \to 0$ iken $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ bulunur. ⋄

(21) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a)	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^x$;	(b)	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^x$;
(c)	$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$;	(d)	$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;
(e)	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$;	(f)	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;
(g)	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\cot^2 x}$;	(h)	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\tan x}$;
(i)	$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;	(j)	$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\cosh 2x}{\cosh x})^{\frac{1}{x^2}}$;
(k)	$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$;	(l)	$\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}, (a>0)$;
(m)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2}, (\alpha\in\mathbb{R})$;	(n)	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}, (x>0)$;
(o)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$;	(p)	$\lim(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x})^{\cot^3 x}$;
(q)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$;	(r)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}$;
(s)	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}, (a>0)$;	(t)	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}, (a>0)$;
(u)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\log_a x}{x^\epsilon}, (a>1,\epsilon>0)$;	(v)	$\lim\limits_{x\to\infty}\cos^n(\frac{x}{\sqrt{n}})$;
(w)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$;	(x)	$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})^{\frac{1}{x}},\ (a,b,c\in\mathbb{R}_+)$;
(y)	$\lim\limits_{x\to x}\frac{\log_a x-\log_a x_0}{x-x}, (x>0)$.		

Çözüm: $x\to x_0$ iken 1^∞ şeklinde belirsizlik oluşturan fonksiyonların limitlerini (2.16) formülünden faydalanarak hesaplayacağız.

(a) $u(x)=\frac{2x+3}{2x+1}, v(x)=x$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to\infty} u(x)=1, \lim_{x\to\infty} v(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}=1$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x=e$$

buluruz.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2}-1)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1)x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}}=e^3$.

(d) $u(x)=1+3x^2, v(x)=\frac{1}{sin^2x}$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to0}u(x)=1,\ \lim_{x\to0}v(x)=+\infty \ \text{ ve } \ \lim_{x\to0}(u(x)-1)v(x)=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{sin^2x}=3$$

olduğundan, (2.16) ya göre;

$$\lim_{x\to0}(1+3x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^3$$

bulunur.

(e) $x=\frac{\pi}{2}+y$ değişken değiştirmesi yaparsak $x\to\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow y\to0$ olur. O halde,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}&=\lim_{y\to0}(\cos y)^{-\cot y}=e^{\lim\limits_{y\to0}(1-\cos y)\cot y}\\&=e^{\lim\limits_{y\to0}2\sin^2\frac{y}{2}\cot y}=e^{\lim\limits_{y\to0}\frac{y^2}{2}\cdot\frac{\cos y}{\sin y}}\\&=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to0}y\cos y}=e^0=1\end{aligned}$$

bulunur.

(f) $u(x)=tanx, v(x)=\tan 2x$ fonksiyonları için,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}u(x)=1,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}v(x)=\infty$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(u(x)-1)v(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\frac{\sin 2x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin x}{\cos x+\sin x} = -1
\end{aligned}$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}$ bulunur.

(g) $u(x) = \cos 6x, v(x) = \cot^2 x$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0} u(x) = 1, \lim_{x\to 0} v(x) = +\infty$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x) = \lim_{x\to 0}(\cos 6x-1)\cot^2 x &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 3x}{\sin^2 x}\cos^2 x \\
&= -2\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{x^2}\lim_{x\to 0}\cos^2 x = -18
\end{aligned}$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\cot^2 x} = e^{-18}$ bulunur.

(h) $u(x) = 1+\cot x, v(x) = \tan x$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} u(x) = 1, \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} v(x) = \infty$$

ve

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(u(x)-1)v(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cot x\tan x = 1$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cot x)^{\tan x} = e$ bulunur.

(i) $u(x) = \frac{1+\tan x}{1+\sin x}, v(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} u(x) = 1, \lim_{x\to 0} v(x) = +\infty \quad \text{ve} \\
&\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\frac{1}{\sin^3 x}
\end{aligned}$$

$[x \to 0$ iken $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$ ve $\sin^3 x \sim x^3]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{1+\sin x}\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin^3 x}} = e^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

(j) $u(x) = \frac{\cosh 2x}{\cosh x}, v(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonları için;

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^x+e^{-x}} = 1, \lim_{x\to 0} v(x) = +\infty$$

ve

$$\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+e^{-2x}-(e^x+e^{-x})}{e^x+e^{-x}}\frac{1}{x^2}$$

$$[e^{2x}+e^{-2x}-(e^x+e^{-x}) = e^{2x}+e^{-2x}-2-(e^x+e^{-x}-2)$$
$$= e^{-2x}(e^{2x}-1)^2 - e^{-x}(e^x-1)^2]$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}(e^{2x}-1)^2 - e^{-x}(e^x-1)^2}{x^2(e^x+e^{-x})}$$
$$= \lim_{x\to 0}[(\frac{e^{2x}-1}{x})^2 e^{-2x} - (\frac{e^x-1}{x})^2 e^{-x}]\frac{1}{e^x+e^{-x}}$$
$$= [\lim_{x\to 0}(\frac{e^{2x}-1}{x})^2 \lim_{x\to 0} e^{-2x} - \lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})^2 \lim_{x\to 0} e^{-x}].\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x+e^{-x}}$$

$[x \to 0$ iken $e^{2x}-1 \sim 2x$ ve $e^x - 1 \sim x$ olduğuna göre, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2, \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1] = (2^2 1 - 1^2 1)\frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$ olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\cosh 2x}{\cosh x})^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

bulunur.

(k) $u(x) = \frac{a^x+b^x}{2}$, $v(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} v(x) = \infty$ ve

$$\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x) = \lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{2x} + \lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{2x}$$

$[x \to 0$ iken $a^x - 1 \sim x\ln a$ ve $b^x - 1 \sim x\ln b] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln a}{2x} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln b}{2x} = \ln\sqrt{ab}$ olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

bulunur.

(l) $x - a = t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to a \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a} &= \lim_{t\to 0}\frac{a^{a+t}-(a+t)^a}{t} = a^a\lim_{t\to 0}\frac{a^t-(1+\frac{t}{a})^a}{t} \\ &= a^a\left(\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t} - \lim_{t\to 0}\frac{(1+\frac{t}{a})^a-1}{t}\right)\end{aligned}$$

$[t \to 0$ iken $a^t - 1 \sim t\ln a$ ve $(1+\frac{t}{a})^a \sim t]$

$$= a^a\left(\lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{t} - \lim_{t\to 0}\frac{t}{t}\right) = a^a(\ln a - 1) = a^a\ln\frac{a}{e}$$

bulunur.

(m) $\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x = \log(1-\frac{h^2}{x^2})$ olduğunda

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\log\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{x^2}{h^2}\right)\log\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}\lim_{h\to 0}\log\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{\frac{-x^2}{h^2}}\ .\end{aligned}$$

$\frac{h^2}{x^2} = t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur.

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}} = -\frac{\log e}{x^2}$$

bulunur.

(n) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^\alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+(\cos x-1))^\alpha-1}{\cos x-1}\frac{1-\cos x}{x^2}$ [$x\to0$ iken $(1+(\cos x-1))^\alpha-1\sim\alpha(\cos x-1), 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ olduğuna göre önerme 2.4.54' ten dolayı]

$$=\lim_{x\to0}\frac{\alpha(\cos x-1)}{\cos x-1}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{\alpha}{2}\ .$$

(o) $x\to0$ iken $a^x-1\sim x$ ve (k) yı kullanırsak

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur.

(p) $u(x)=\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}, v(x)=\cot^3 x$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to0}v(x)=\infty$ ve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}(u(x)-1)v(x)&=\lim_{x\to0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{1+\sin x\cos\beta x}\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos\alpha x-1+1-\cos\beta x}{1+\sin x\cos\beta x}\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

[$x\to0$ iken $\cos\alpha x\sim1-\frac{\alpha^2}{2}x^2+o(x^2)$, $\cos\beta x\sim1-\frac{\beta^2}{2}x^2+o(x^2)$, $\cos x\sim1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $\sin^2 x\sim x^2+o(x^2)$]

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\alpha^2}{2}x^2+\frac{\beta^2}{2}x^2+o(x)}{1+(x+o(x))(1-\frac{\beta^2}{2}x^2+o(x^2))}\frac{(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))^3}{x^2+o(x^2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\end{aligned}$$

bulunur.

(q) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\pi((x^\alpha-1)+1)}{\sin\pi((x^\beta-1)+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\pi(x^\alpha-1)}{\sin\pi(x^\beta-1)}$
[$x\to1$ iken $\sin\pi(x^\alpha-1)\sim\pi(x^\alpha-1)$, $\sin\pi(x^\beta-1)\sim\pi(x^\beta-1)$]

$$=\lim_{x\to1}\frac{\pi(x^\alpha-1)}{\pi(x^\beta-1)}$$

[$x-1=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 1 \Leftrightarrow t\to 0$ olur].

$$\lim_{t\to 0}\frac{((1+t)^{\alpha}-1)}{((1+t)^{\beta}-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha t+o(t)}{\beta t+o(t)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

bulunur.

(r) $t=\sin^2(\pi 2^x)$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 1\Leftrightarrow t\to 0$ olur. Bu durumda, $\cos(\pi 2^x)=\sqrt{1-t}$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(\sqrt{1-t})}=2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1-t)}\\&=-2\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1-t)^{\frac{-1}{t}}}=-2\frac{1}{\ln e}=-2\end{aligned}$$

bulunur.

(s) $x-a=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to a\Leftrightarrow t\to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\lim_{t\to 0}a^{\alpha-\beta}\frac{(1+\frac{t}{a})^{\alpha}-1}{(1+\frac{t}{a})^{\beta}-1}=a^{\alpha-\beta}\lim_{t\to 0}\frac{\alpha\frac{t}{a}+o(t)}{\beta\frac{t}{a}+o(t)}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$$

bulunur.

(t) $a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x=a^{x-h}(a^{2h}+1-2a^h)=a^{x-h}(a^h-1)^2$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}&=\lim_{h\to 0}a^{x-h}(\frac{a^h-1}{h})^2\\&=\lim_{h\to 0}a^{x-h}(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h})^2=a^x(\ln a)^2=a^x\ln^2 a\end{aligned}$$

bulunur.

(u) $u(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}, v(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu için

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1,\lim_{x\to 0}v(x)=\infty$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(u(x)-1)v(x) &= \frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0} a\frac{a^x-1}{x}+b\frac{b^x-1}{x}+c\frac{c^x-1}{x}\\ &= \frac{1}{a+b+c}(a\ln a+b\ln b+c\ln c)=\frac{\ln a^a b^b c^c}{a+b+c}\end{aligned}$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı

$$\lim_{x\to 0}(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln a^a b^b c^c}{a^2+b^2+c^2}} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

bulunur.

(v) $u, v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, u(n) = \cos\frac{x}{\sqrt{n}}, v(n) = n$ fonksiyonları (dizileri) için

$$\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} u(n) = 1,$$

$$\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} v(n) = +\infty$$

ve

$$\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}(u(x)-1)v(x) = \lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}(\cos\frac{x}{\sqrt{(n)}}-1)n$$

[$\mathbb{N}\ni n\to\infty$ iken $\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1=-\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}+o(\frac{1}{n})$]

$$= \lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty}(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}+o(\frac{1}{n}))n = -\frac{x^2}{2}$$

olduğuna göre, (2.16) dan dolayı $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^n(\frac{x}{\sqrt{n}}) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ bulunur.

(w) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln 2+\ln(1+2^{-x})\ln(1+\frac{3}{x}))$
[$x\to+\infty$ iken $\ln(1+2^{-x}) = 2^{-x}+o(2^{-x})$ ve $\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\frac{3}{x}+o(\frac{1}{x})$]

$$\begin{aligned}&= \lim_{x\to+\infty}(x\ln 2+2^{-x}+o(2^{-x}))(\frac{3}{x}+o(\frac{1}{x}))\\ &= \lim_{x\to+\infty}(3\ln 2+\frac{3}{x2^{-x}}+\frac{3}{x}o(2^{-x})+x\ln 2o(\frac{1}{x})+2^{-x}o(2^{-x})+o(2^{-x})o(\frac{1}{x}))\\ &= 3\ln 2=\ln 8\end{aligned}$$

bulunur.

(x) $x - x_0 = t$ değişken değiştirmesi yaparsak; $x \to x_0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde, $\ln(1+\frac{t}{x_0}) = \dfrac{t}{x_0} + o(t)$ olacağından

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\log_a(1+\frac{t}{x_0})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\frac{t}{x_0})}{t\ln a}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{x_0}+o(t)}{t\ln a} = \frac{1}{x_0\ln a}\end{aligned}$$

bulunur.

(y) $x^\epsilon = t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a t}{t^\epsilon}$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n^\epsilon} = 0$ olduğuna göre, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\log_a(n+1)}{n^\epsilon} = 0 \Rightarrow < \forall\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_\epsilon$ için

$$0 < \frac{\log_a(n+1)}{n} < \epsilon$$

olur. $t > n_\epsilon$ ve $n = [\![\, t \,]\!]$ olsun. Bu durumda, $n > n_\epsilon$ ve $n \le t < n+1$ olacağından,

$$0 < \frac{\log_a t}{t} < \frac{\log_a(n+1)}{n} < \epsilon$$

bulunur. Buradan, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log_a t}{t} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\epsilon} = 0$ olduğu anlaşılır.$\diamond$

(22) Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{t\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$; (b) $\lim\limits_{t\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$;

(c) $\lim\limits_{t\to+\infty}\text{arccot} x = 0$; (d) $\lim\limits_{t\to-\infty}\text{arccot} x = \pi$;

Çözüm: (a) $\forall\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ sayısı verilmiş olsun. O halde,

$$x > \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon) = \delta_\epsilon \Rightarrow \arctan x > \frac{\pi}{2} - \epsilon$$

olur. Böylece, $\forall 0 < \epsilon < \dfrac{\pi}{2}$ için $\exists \delta_\epsilon = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \epsilon) > 0$ öyleki $\forall x > \delta_\epsilon$ için $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ bulunur.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = [x = -t \Rightarrow x \to -\infty \Leftrightarrow t \to +\infty]$
$= -\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t = -\dfrac{\pi}{2}$ bulunur.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\text{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ olduğundan,

$$\lim_{x\to+\infty} \text{arccot} x = \lim_{x\to+\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

bulunur.

(d) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \text{arccot} x &= \lim_{x\to-\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to-\infty} \arctan x \\ &= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(23) Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x \to 0$ iken $\sinh x = x + o(x)$ dir;

(b) $x \to 0$ iken $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ dir;

(c) $x \to 0$ iken $\tanh x = x + o(x)$ dir.

Çözüm: (a) $x \to 0$ iken $e^x = 1 + x + o(x)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0} \frac{\sinh x}{x} &= \lim_{t\to0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{t\to0} e^{-x} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \\ &\lim_{t\to0} e^{-x} \frac{2x + o(x)}{2x} = 1\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, (a) nın doğruluğu anlaşılır.

(b) (a) ya göre

$$\lim_{t\to0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{t\to0} \frac{2\sinh^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \lim_{t\to0} \frac{1}{2} \Big(\frac{\sinh \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2 = \frac{1}{2}$$

bulunur. Buradan, da (b) nin doğruluğu anlaşılır.

(c) $x \to 0$ iken $\sinh x = x + o(x)$ ve $\lim\limits_{x\to 0}\cosh x = 1$ olduğuna göre;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}.\frac{1}{\cosh x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}\frac{1}{\cosh x} = 1$$

bulunur. Buradan, (c) nin doğruluğu anlaşılır. $\diamond$

(24) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin ax}{x}$ $(a \neq 0)$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan ax}{x}$, $(a \neq 0)$; (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\arcsin 3x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x^2+3x)}{\arcsin 2x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{\arctan x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x - \arctan x}{x^3}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(a+x)-\arctan a}{x}$; (l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}+x)$;

(m) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$; (n) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi\sqrt{n^2+n}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\dfrac{1}{x}}}$; (p) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; (q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh^2 x}{\ln\cosh 3x}$.

Çözüm: (a) $t = \arcsin x$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$$

bulunur.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{ax} a = a$.

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{ax} a = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan ax}{\tan(\arctan ax)} a = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} a = a$.

(d) (b)'den $x \to a$ iken $\arcsin 3x \sim 3x$ bulunur. O halde, $x \to 0$ iken $\tan x \sim x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\arcsin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

(e) $x \to 0$ iken $\arctan(x^2 + 3x) \sim x^2 + 3x$ ve $\arcsin 2x \sim 2x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^2 + 3x}{\arcsin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + 3}{2} = \frac{3}{2} .$$

(f) $t = \arccos(1 - x)$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x \to 0+ \Leftrightarrow t \to 0^+$ olur. Bu durumda,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1 - x)}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{2}\frac{t}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} .$$

(g)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{e^{x^2} - 1}}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2 + o(x^2)}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|\, x \,| \sqrt{1 + o(x)}}{x}$$
$$= -\lim_{x\to 0^-} \sqrt{1 + o(x)} = -1$$

(h) $u(x) = \frac{\arcsin x}{\arctan x}$, $v(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1, \quad \lim_{x\to 0} v(x)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

olur. Şimdi $\lim\limits_{x\to 0}[u(x)-1]v(x)$ limitini bulalım. $t=\arcsin x-\arctan x$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$ olur. O halde, $t\to 0$ iken $\tan t\sim t$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} t\sim \tan t \Rightarrow \arcsin x-\arctan x &\sim \tan(\arcsin x-\arctan x)\\ &= \frac{\tan(\arcsin x)-\tan(\arctan x)}{1+\tan(\arcsin x)\tan(\arctan x)}\\ &= \frac{\dfrac{x}{\cos(\arcsin x)}-x}{1+\dfrac{x^2}{\cos(\arcsin x)}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x}{1+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}\\ &= \frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2+\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{xx^2}{(x^2+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}\sim\frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre,

$$\lim_{x\to 0}u[(x)-1]v(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^2x}=\frac{1}{2}$$

olduğundan (2.16) dan dolayı $=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\arcsin x}{\arctan x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$

(i) $t=-\ln x$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 1^-\Leftrightarrow t\to 0^+$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\arccos e^{-t}}{\sqrt{t}}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\arccos(1-(1-e^{-t}))}{\sqrt{1-e^-t}}\frac{\sqrt{1-e^-t}}{\sqrt{t}} = \end{aligned}$$

$[t\to 0^+$ iken $1-e^{-t}\sim t$ ve (f) den dolayı $\arccos(1-(1-e^{-t}))\sim \sqrt{2}\sqrt{1-e^-t}] = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1-e^{-t}}}{\sqrt{1-e^{-t}}}\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=\sqrt{2}$ bulunur.

(j) (h) den görüldügü gibi $x\to 0$ iken $\arcsin x-\arctan x\sim\frac{x^3}{2}$ dir.

Buna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}\,.$$

(k) $t=\arctan(a+x)-\arctan a$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$ olur. O halde, (h) ye benzer olarak $x\to a$ iken $\arctan(a+x)-\arctan a \sim \tan(\arctan(a+x)-\arctan a)$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(a+x)-a\arctan a}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\arctan(a+x)-\arctan a)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a+x-a}{1+a(a+x)}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+aa+x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+a(a+x)}=\frac{1}{1+a^2}\end{aligned}$$

bulunur.

(l) $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}+x)&=\lim_{x\to-\infty}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\arcsin\frac{x}{|x|(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{x}{|x|})}\\&=\lim_{x\to-\infty}\arcsin\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+1}}=\arcsin\frac{-1}{2}=\frac{-\pi}{6}\,.\end{aligned}$$

(m) $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}))&=\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n)+\pi n)=(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))\\&=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\pi(\sqrt{n^2+1}+n)}\end{aligned}$$

ve $x\to 0$ iken $\sin x{\sim}x$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}))&=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\pi(\sqrt{n^2+1}+n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\pi}{\pi(\sqrt{n^2+1}+n)}=0\end{aligned}$$

bulunur.

(n) (l) ye benzer olarak;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin^2\pi\sqrt{n^2+n} &= \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi n}{n(\sqrt{n^2+n}+n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = 1\end{aligned}$$

bulunur.

(o) $t=\frac{1}{x}$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to +\infty$ olur. Bu durumda,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+e^t} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

bulunur.

(p) $t=\frac{1}{x}$ değişken değiştirmesi yaparsak, $x\to 0^- \Leftrightarrow t\to -\infty$ olur. Bu durumda,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+e^t} = \frac{1}{1+0} = 1$$

bulunur.

(q) $x\to 0$ iken $\sinh x = x+o(x)$ ve $\cosh 3x \sim 1+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2 x}{\ln\cosh 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))^2}{\ln(1+\frac{9}{2}x^2+o(x^2))}$$

$t\to 0$ iken $\ln(1+t)=t+o(t)]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))^2}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{o(x^2)}{x})^2}{\frac{9}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{2}{9}$$

bulunur. $\diamond$

(25) Eğer, $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonsiyonu her sonlu (a,b) aralığı üzerinde sınırlı ise,

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x),$

(b) $\forall x \in (a,+\infty)$ için $f(x) \geq c > 0$

olduğunda $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: İspatı okuyucuya bırakılmıştır. $\diamond$

(26) Problem (25) ten yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{1+x})^{\frac{1}{x+1}}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+4^x)}{x}$.

Çözüm: (a) Problem (25) (b) den dolayı;

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \ln x(1+\frac{1}{x})[\ln x]^{-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} [\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})][\ln x]^{-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}) \\
&= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \\
&= 1 + \lim_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x})^{\ln x}
\end{aligned}$$

$u(x) = 1+\frac{1}{x}, v(x) = \ln x$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to+\infty} [u(x)-1]v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ olur.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to+\infty} [u(x)-1]v(x) = 0$ olur. Bu durumda, (2.16) dan dolayı

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \big(1+\frac{1}{x}\big)^{\ln x} = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x})^{\ln x} \\
= \ln 1 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1
\end{aligned}$$

bulunur.

(b) (a) ya benzer olarak

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{1+x})^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{t})^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{1}{t}}$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t+1} = 1$$

(c) Problem (25) (a) dan dolayı

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+4^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+4^{x+1}) - \ln(1+4^x)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+4^{x+1}}{1+4^x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\frac{1}{4^x}+4}{\frac{1}{4^x}+1}$$
$$= \ln 4$$

bulunur. $\diamond$

(27) Aşağıdaki fonksiuyon çiftinin hangisi $x \to 0$ iken aynı mertebedendir.

(a) $f(x) = e^x, \quad g(x) = 10 + x;$

(b) $f(x) = \dfrac{5}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)};$

(c) $f(x) = x(2+\sin\frac{1}{x}), \quad g(x) = x;$

(d) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x.$

Çözüm: (a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to0}\frac{10+x}{e^x} = \frac{10+0}{1} = 10$
olduğuna göre, $x \to 0$ iken $e^x \asymp 10 + x$ dir.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{5\ln(1+x)}{x} = 5\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 5$

olduğuna göre, $x \to 0$ iken $\dfrac{5}{x} \asymp \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ dir.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |2+\sin\tfrac{1}{x}| \leq 2 + |\sin\tfrac{1}{x}| \leq 3$$

olduğuna göre, $x \to 0$ iken f, g ye göre sınırlıdır. Yani, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $|f(x)| \leq 3|g(x)|$ dir. Öte yandan, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |2 + \sin\tfrac{1}{x}| \geq 2 - |\sin\tfrac{1}{x}| \geq 1$$

olduğuna göre, aynı x ler için $|g(x)| \leq |f(x)|$ olur. Demek ki, $x \to 0$ iken

$$x(2 + \sin\tfrac{1}{x}) \asymp x$$

dir.

(d) $\forall c \in \mathbb{R}_+$ sayısı için $|x| \leq c|x^2|$ eşitsizliği $x = 0$ noktasının hiç bir komşuluğunda saǐanamaz. Bu nedenle $g(x) = x$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ fonksiyonuna göre sınırlı değildir. Dolayısıyla, x ve x^2 fonksiyonları aynı mertebeli fonksiyonlar değillerdir. $\diamond$

(28) Aşağıda verilen fonksiyonların sonsuz küçük olması için α ve β ne olmalıdır?

(a) $x \to \infty$ iken $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta$;

(b) $x \to +\infty$ iken $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta$;

(c) $x \to \infty$ iken $f(x) = (x+4)e^{\frac{1}{x}} - \alpha x - \beta$;

(d) $x \to \infty$ iken $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}$.

Çözüm: (a) $f(x) = \dfrac{x^2(x-1) - (\alpha x + \beta)(x+1)^2}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(1-\alpha)x^3 - (1 + 2\alpha + \beta)x^2 - (\alpha + 2\beta)x - \beta}{x^2 + 2x + 1}$$

dir. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ olması için payın derecesi paydanın derecesinden küçük olmalıdır. Bu nedenle, $1 - \alpha = 0$ ve $1 + 2\alpha + \beta = 0$,yani $\alpha = 1$ ve $\beta = -3$ olduğunda $x \to 0$ iken $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - x + 3$ fonksiyonu sonsuz küçük bir fonksiyondur. Yani, $x \to 0$ iken $f(x) = o(1)$ dir.

(b) $f(x) = 2x\sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}} - \alpha x - \beta =$
$[t \to 0 \quad \text{iken} \quad (1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t^2) \quad \text{olduğuna göre}]$

$$\begin{aligned} &= 2x\big(1 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2}\big) + o(\tfrac{1}{x^2}) - \alpha x - \beta \\ &= \frac{1}{4} - \beta + (2-\alpha)x + xo(\tfrac{1}{x^2}) \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ olması için $\dfrac{1}{4} - \beta = 0$ ve $2 - \alpha = 0$, yani $\alpha = 2$ ve $\beta = \dfrac{1}{4}$ olmalıdır. Demek ki, $x \to \infty$ iken $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x - \dfrac{1}{4} = o(1)$ dir.
(c) $t \to 0$ iken $e^t = 1 + t + o(t)$ olduğuna göre, $x \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+4)e^{\frac{1}{x}} - \alpha x - \beta \\ &= (x+4)(1 + \frac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x})) - \alpha x - \beta \\ &= 5 - \beta + (1-\alpha)x + \frac{4}{x} + o(\tfrac{1}{x}) \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ olması için $\alpha = 1$ ve $\beta = 5$ olmalıdır. Dolayısıyla, $x \to \infty$ iken $f(x) = (x+4)e^{\frac{1}{x}} - x - 5 = o(1)$ dir.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $\forall \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x^\alpha \sin \tfrac{1}{x^\beta}| \\ &= |x^\alpha|.|\sin \tfrac{1}{x^\beta}| \le |x^\alpha| \end{aligned}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ olması için $\alpha > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\alpha > 0$ ve β herhangi bir reel sayı olmak üzere, $x \to \infty$ iken $f(x) = o(1)$ dir. $\alpha = 0$ durumunda

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin \tfrac{1}{x^\beta} = 0$$

olması için $\beta < 0$ olmalıdır.

Şimdi $\alpha < 0$ olsun. Bu durumda, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ olması için $x \to 0$ iken $\sin\frac{1}{x^\beta}$ fonksiyonunun limiti var ve sıfır olmalıdır. Bu nedenle $\beta < 0$ olmalıdır. Bu durumda, $x \to 0$ iken

$$\begin{aligned} x^\alpha.\sin\tfrac{1}{x^\beta} &= x^\alpha.\sin x^{-\beta} \sim x^\alpha(x^{-\beta} + o(x^{-2\beta})) \\ &= x^{\alpha-\beta} + x^\alpha.o(x^{-2\beta}) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan görüldüğü gibi $\alpha < 0$ ve $\beta < 0$ durumunda, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ olması için $\alpha > \beta$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\alpha > 0$ ve β herhangi bir reel sayı olduğunda, $x \to 0$ iken $f(x) = o(1)$ dir; $\alpha \le 0$, $\beta < 0$ ve $\alpha > \beta$ olduğunda, $x \to 0$ iken $f(x) = o(1)$ sonuçlarının doğruluğu anlaşılır. $\diamond$

(29) Aşağıda verilen fonksiyonların $x = 0$ noktasında sıçramasını (Bkz. Tanım 2.4.37) bulunuz.

(a) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;
(c) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$; (d) $f(x) = x(2 + \sin\frac{1}{x})$.

Çözüm: (a) $\forall\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &= \sup\{\ |f(x) - f(y)| :\ x, y \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &= \sup\{\ f(x) :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &- \inf\{\ f(x) :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &= \sup\{\ \sin\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &- \inf\{\ \sin\tfrac{1}{x} :\ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\} \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \Omega(f, 0) &= \inf\{\ d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) : \epsilon\ > 0\ \} \\ &= \inf\{\ 2 : \epsilon > 0\ \} = 2 \end{aligned}$$

bulunur.

(b) $\forall\epsilon > 0$ için $\inf\{\dfrac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x} : \ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} = 0$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &= \sup\{\frac{1}{x^2}\cos^2\tfrac{1}{x} : \ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &\quad - \inf\{\frac{1}{x^2}\cos^2\tfrac{1}{x} : \ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &= \sup\{\frac{1}{x^2}\cos^2\tfrac{1}{x} : \ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0) \end{aligned}$$

bulunur. $k \in \mathbb{Z}(\epsilon) = \{\ k \in \mathbb{Z} : \ |k|\pi > \dfrac{1}{\epsilon}\ \}$ olmak üzere buradan aynı k lar için

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &\geq \sup\{\frac{1}{x^2}\cos^2\tfrac{1}{x} : \ \frac{1}{|k|\pi} \leq |x| < \epsilon\ \} \\ &= \sup\{k^2\pi^2 \ : \ \frac{1}{|k|\pi} \leq |x| < \epsilon\} \end{aligned}$$

olduğu anlaşılır. Dolayısıyla,

$$\Omega(f,0) = \inf\{\ d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) : \epsilon\ > 0\ \} = +\infty$$

bulunur.

(c) $\forall\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &= \sup\{\frac{1}{\pi}\arctan\tfrac{1}{x} : \ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &\quad - \inf\{\frac{1}{\pi}\arctan\tfrac{1}{x} : \ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2}) = 1 \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\Omega(f,0) = \inf\{\ d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) : \epsilon\ > 0\ \} = 1$$

bulunur.

(d) $\forall\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} d(f(\overset{\circ}{U}_\epsilon(0))) &= \sup\{x(2+\sin\tfrac{1}{x}) : \ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &\quad - \inf\{x(2+\sin\tfrac{1}{x}) : \ x \in \overset{\circ}{U}_\epsilon(0)\ \} \\ &\leq 3\epsilon - (-\epsilon) = 4\epsilon \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\Omega(f,0)=\inf\{\ d(f(\overset{\circ}{U}_{\epsilon}\ (0))) : \epsilon\ >0\ \}=0$$

bulunur. $\diamond$

(30) Aşağıda verilen fonksiyonların $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ ve $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x)$ limitlerini bulunuz.

(a) $f(x)=\dfrac{\mathrm{sgn}x}{x^2+1}$; (b) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+1)$;

(c) $f(x)=\sin^2\frac{1}{x}+\dfrac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$.

Çözüm: (a) $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$$0\le\left|\frac{\mathrm{sgn}x}{1+x^2}\right|=\frac{1}{1+x^2}\le 1$$

olduğu açıktır. $x_n\in\mathbb{R}_+$, $n=1,2\ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ koşullarını sağlayan (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sgn}x_n}{x_n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2+1}=1$$

ve $y_n\in\mathbb{R}_-$, $n=1,2,\ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ koşullarını sağlayan (y_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{sgn}y_n}{y_n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{y_n^2+1}=-1$$

olduğuna göre,

$$\underline{\lim}_{x\to 0}\frac{\mathrm{sgn}x}{x^2+1}=-1,\qquad \overline{\lim}_{x\to 0}\frac{\mathrm{sgn}x}{x^2+1}=1$$

bulunur.

(b) $\forall x\in[-2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}]$ için

$$0\le f(x)=e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+1)=e^{\frac{1}{x}}((x+2)^2-3)<+\infty$$

olduğu açıktır. $x_n \in [-2+\sqrt{3}, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ koşullarını sağlayan (x_n) dizisi için

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{x_n}}(x_n^2 + 4x_n + 1)\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{x_n}} \lim_{n\to\infty}(x_n^2 + 4x_n + 1) = 0.1 = 0\end{aligned}$$

ve $y_n \in (0, 2-\sqrt{3}]$ $n = 1, 2, \ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ koşullarını sağlayan (y_n) dizisi için

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(y_n) &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{y_n}}(y_n^2 + 4y_n + 1)\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{y_n}} \lim_{n\to\infty}(y_n^2 + 4y_n + 1) = +\infty.1 = +\infty\end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$\varliminf_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}(x^2 + 4x + 1) = 0, \qquad \varlimsup_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}(x^2 + 4x + 1) = +\infty$$

bulunur.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $0 \le \sin^2 \frac{1}{x} \le 1$ olduğuna göre, $x = x_n = -\dfrac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\inf\{\ \sin^2 \tfrac{1}{x} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \} = \sin^2 \tfrac{1}{x_n} = 0$$

ve $x = y_n = \dfrac{1}{\pi(1+2n)}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sup\{\ \sin^2 \tfrac{1}{x} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \} = \sin^2 \tfrac{1}{y_n} = 0$$

bulunur. Öte yandan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \arctan \tfrac{1}{x_n} = -1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \arctan \tfrac{1}{y_n} = 1$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(\sin^2 \tfrac{1}{x_n} + \frac{2}{\pi} \arctan \tfrac{1}{x_n}) = -1,\\ \lim_{n\to\infty} f(y_n) &= \lim_{n\to\infty}(\sin^2 \tfrac{1}{y_n} + \frac{2}{\pi} \arctan \tfrac{1}{y_n}) = 1\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} (\sin^2 \tfrac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \arctan \tfrac{1}{x}) = -1,$$
$$\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} (\sin^2 \tfrac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \arctan \tfrac{1}{x}) = 1$$

olduğu anlaşılır. $\diamond$

(31) Aşağıda verilen fonksiyonların $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)$ ve $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)$ limitlerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sin^2(x\sqrt{2}) + b^2\cos^2(x\sqrt{2})$;

(b) $f(x) = \dfrac{(1+\frac{1}{x})^x}{2+\sin^2\frac{1}{x}}$.

Çözüm: (a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 1 + (b^2-1)\cos^2(x\sqrt{2})$ olduğu açıktır.

1. $b^2 = 1$ ise, $f(x) = 1 \Rightarrow \underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = 1$ bulunur.

2. $b^2 > 1$ olsun. $x_n = \dfrac{n\pi}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sup\{\ \cos^2(x\sqrt{2}) :\ x \in \mathbb{R}\ \} = \cos^2(x_n\sqrt{2}) = 1$$

ve $y_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\inf\{\ \cos^2(x\sqrt{2}) :\ x \in \mathbb{R}\ \} = \cos^2(y_n\sqrt{2}) = 0$$

olduğuna göre,

$$\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (1 + (b^2-1)\cos^2(x_n\sqrt{2})) = b^2$$
$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} (1 + (b^2-1)\cos^2(y_n\sqrt{2})) = 1$$

bulunur.

3. $b^2 < 1$ olsun. Bu durumda, $f(x) = b^2 + (1-b^2)\sin^2(x\sqrt{2})$ biçiminde yazarak 2. ye benzer olarak

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = b^2, \quad \overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = 1$$

bulunur. Böylece,

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \min\{1, b^2\}, \quad \overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \max\{1, b^2\}$$

olduğu anlaşılır.
(b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $2 \le 2 + \sin^2 \frac{1}{x} \le 3$ olduğu açıktır. $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\inf\{\ 2 + \sin^2 \tfrac{1}{x} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} = 2 + \sin^2 \tfrac{1}{x_n} = 2$$

ve $y_n = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sup\{\ 2 + \sin^2 \tfrac{1}{x} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} = 2 + \sin^2 \tfrac{1}{y_n} = 3$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}}{2+\sin^2 \frac{1}{y_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\sin^2 \frac{1}{y_n}} \\
&= e.\frac{1}{3} = \frac{e}{3}, \\
\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}}{2+\sin^2 \frac{1}{x_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\sin^2 \frac{1}{x_n}} \\
&= e.\frac{1}{2} = \frac{e}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. ◇

(32) $a > 0$ iken aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\forall y \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\log_a(y^\alpha) = \alpha \log_a y$ dir.

(b) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1.x_2}$ dir.

Çözüm: (a) Logaritmik fonksiyonunun 2^1 özelliğinden yararlanarak $\forall y_1 > 0, y_2 > 0, \ldots, y_n > 0$ sayıları için

$$\log_a(y_1.y_2\ldots y_n) = \log_a y_1 + \log_a y_2 + \ldots + \log_a y_n$$

eşitliğinin doğruluğu kolayca gösterilebilir. Buna göre, $\forall y \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\log_a(y^n) = \log_a \underbrace{(y.y\ldots y)}_{n-kez} = \log_a y + \log_a y + \ldots + \log_a y = n.\log_a y$$

olur. Dolayısıyla, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\log_a(y^n) = n \log_a y \tag{2.17}$$

eşitliği doğrudur.

$$\beta = \log_a y \Rightarrow y = a^\beta \Rightarrow y^{-1} = a^{-\beta} \Rightarrow \log_a(y)^{-1} = -\beta$$

ve dolayısıyla,

$$\log_a(y^{-1}) = -\log_a y \tag{2.18}$$

bulunur. (2.17) ve (2.18) den dolayı $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$ için

$$\log_a(y^\alpha) = \alpha \log_a y \tag{2.19}$$

olduğu anlaşılır. $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için (2.19) dan dolayı

$$\log_a y = \log_a(y^{\frac{1}{n}})^n = n \log_a y^{\frac{1}{n}}$$

olduğuna göre aynı n ler için

$$\log_a(y^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \log_a y \tag{2.20}$$

bulunur.

Şimdi $\forall\alpha = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Önce (2.20) dan ve sonra da (2.17) den yararlandığımızda

$$\frac{m}{n}\log ay = m\log_a(y^{\frac{1}{n}}) = \log_a(y^{\frac{1}{n}})^m = \log_a(y^{\frac{m}{n}}) \tag{2.21}$$

olduğu elde edilir. $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Üstel fonksiyonunun 3) özelliğinden dolayı $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} y^r = y^\alpha$ ve buna göre (Logaritmik fonksiyonun 3^1) özelliği gereğince) $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} \log_a y^r = \log_a y^\alpha$ olduğu elde edilir. Öte yandan, $\forall r \in \mathbb{Q}$ için $\log_a y^r = r\log_a y$ olduğuna göre,

$$\log_a y^\alpha = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} \log_a y^r = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha} r\log_a y = \alpha\log_a y$$

dir. Dolayısıyla, $\forall y \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için $\log_a(y^\alpha) = \alpha\log_a y$ eşitliğinin doğru olduğu anlaşılır.

(b) $a = 1$ durumunda, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için $1^\alpha = 1$ kabul edilir. Dolayısıyla, bu durumda (b) önermesi doğrudur.

$a \neq 1$ durumunda, (a) dan dolayı

$$\begin{aligned}\log_a((a^{x_1})^{x_2}) &= x_2\log_a(a^{x_1}) = x_2.x_1\log_a a\\ &= x_1.x_2 = \log_a(a^{x_1.x_2})\end{aligned}$$

bulunur. Logaritmik fonksiyonun 4^1) özelliğinden dolayı, buradan $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1.x_2}$ eşitliğinin doğru olduğu anlaşılır. $\diamond$

2.6 Ek Problemler

(33) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to2}(3x^2-2) = 10$; (b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{x+3} = -\dfrac{1}{2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x+4} = 3$; (d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3} = -\dfrac{1}{4}$.

(34) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3-1}{|x-1|} = -3$; (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-1}{|x-1|} = 3$;

(c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (x - [\![x]\!]) = \dfrac{1}{2}$; (d) $\lim\limits_{x\to n^-} (x - [\![x]\!]) = 1, \ (n \in \mathbb{Z})$;

(e) $\lim\limits_{x\to n^+} (x - [\![x]\!]) = 0, \ (n \in \mathbb{Z})$.

(35) "$\epsilon - \delta$" yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

(36) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dfrac{\cos x}{3 - 2^{\frac{1}{\sin x}}}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz. $x = 0$ da limit var mıdır?

Cevap: $f(0^-) = \dfrac{1}{3}, \ f(0^+) = 0, \ x = 0$ noktasında limit yoktur.

(37) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+1}{x}, & x > 1 \text{ ise}, \\ \dfrac{2ax+bx}{x+1}, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 1$ de limitinin olması için a ve b ne olmalıdır?

Cevap: a herhangi bir reel sayı ve $b = 2$.

(38) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{x\pi}{2}), & |x| \leq 1 \text{ ise}, \\ a + |x-1|, & |x| > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = -1$ de limitinin olması için a ne olmalıdır?

Cevap: $a = -2$.

(39) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} x^2, & x\text{-irrasyonel ise}, \\ 1, & x\text{-rasyonel ise} \end{cases}$

fonksiyonunun limitli olmadığı noktalar kümesini bulunuz.

Cevap: $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

(40) (a) $\alpha(x) = 2x^2$; (b) $\alpha(x) = 3x$; (c) $\alpha(x) = \sqrt{[\![x]\!]}$;
(d) $\alpha(x) = \dfrac{x}{\ln|x|}$; (e) $\alpha(x) = 1 - \cos x$

fonksiyonları için $x \to 0$ iken $\alpha(x) = o(x)$ eşitliğinin doğru olup olmadığını inceleyiniz.

Cevap: (a) $2x^2 = o(x)$; (b) $3x \neq o(x)$; (c) $\sqrt{|x|} \neq o(x)$
(d) $\dfrac{x}{\ln|x|} = o(x)$; (e) $1 - \cos x = o(x)$.

(41) (a) $\alpha(x) = \sin^2 x$; (b) $\alpha(x) = x^3$; (c) $\alpha(x) = 1 - \cos x$;

fonksiyonları için $x \to 0$ iken $\alpha(x) = o(x^2)$ eşitliğinin doğru olup olmadığını inceleyiniz.

Cevap: (a) $\sin^2 x \neq o(x^2)$; (b) $x^3 = o(x^2)$; (c) $1 - \cos x \neq o(x^2)$.

(42) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$; (b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$; (d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{4-\sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13}+2}$;

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$; (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$; (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1+x}+x}$; (j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$;

(k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$ (l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$;

(m) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$; (n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$; (p) $\lim\limits_{x\to 1} (\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n})$, $(m, n \in \mathbb{N})$;

(r) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-x^2}{x-2}$; (s) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(2\pi x^\beta)}$, $(\beta \neq 0)$.

Cevap:

(a)-1; (b) $\dfrac{-1}{3}$; (c) 1; (d) $\dfrac{3}{2}$; (e) $+\infty$;
(f) $-\dfrac{5}{2}$; (g) $+\infty$; (h) $-\dfrac{1}{2}$; (i) $\dfrac{1}{6}$; (j) $1-\sqrt[4]{4}$;

(k) -2; (l) 0; (m) $\dfrac{5^{10}}{3^{25}}$; (n) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; (o) $\dfrac{2}{\pi}$;
(p) $\dfrac{m-n}{2}$; (r) $4\ln\frac{2}{e}$; (s) $-\dfrac{\alpha}{2\beta}$.

(43) Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x \to$ iken

1) $\cos(4x^2+x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$;
2) $2^{x^3+x^2} = 1 + x^2\ln 2 + o(x^2)$;
3) $\ln\cos(2x+x^2) = -2x^2 + o(x^2)$;
4) $5^{e^x - \cos\sqrt{|x|}} = 1 + (x + \dfrac{|x|}{2})\ln 5 + o(x)$.

(b) $x \to 0^+$ iken

1) $\sin^2(5\sqrt{x}+x) = 25x + o(x)$; 2) $e^{2x+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$;
3) $\cosh\sqrt{\sin x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$; 4) $\sqrt[3]{\cos\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{x}{6} + o(x)$;

(c) $x \to 2$ iken

1) $\sin(x-2)^2 = (x-2)^2 + o((x-2)^2)$;
2) $(3-x)^\beta = 1 + \beta(2-x) + o(2-x)$;
3) $\ln(x-1) = x - 2 + o(x-2)$;
4) $\tan(\pi x^2) = \pi(x^2-4) + o(x-2)$;
5) $\sqrt[5]{x-1} - \sqrt[7]{x-1} = \dfrac{2}{35}(x-2) + o(x-2)$;
6) $x^x - 4 = 4(1+\ln x)(x-2) + o(x-2)$.

(d) $x \to \infty$ iken

1) $\sqrt{x^2+x} - x = \dfrac{1}{2} + o(1)$; 2) $\sqrt[3]{x^3+x} - x = \dfrac{1}{3x} + o(\frac{1}{x})$;
3) $\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + o(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})$; 4) $\sinh\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + o(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})$;

(44) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;
(c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$; (ç) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^4(3\sqrt{x})}$; (e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x + 2\cot x}{(\pi - x)\sin\frac{x}{2}}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x + 1}$; (g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\tan^3 x}$;

(ğ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}$;

(ı) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \cot 2x.\cot(\frac{\pi}{4}-x)$; (i) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1+\cos x}$;

(l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$; (m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px}$;

(n) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x-a}$; (o) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cot x - \cot a}{x-a}$, $(a \neq k\pi, k\in\mathbb{Z})$;

(ö) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{3\pi x^\alpha}{2}}{\ln(2x-\sqrt[7]{x})}$; (p) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$;

(r) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$; (s) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x+2}$;

(ș) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x}}{\cos\frac{\pi+x}{2}}$; (t) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi}}$;

(u) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\cos \pi x}{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{4x}}$; (ü) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln\cosh x)$;

(v) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln(e^{x^2} + 2\sqrt{x})}{\tan\sqrt{x}}$; (y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx - n}{\sin x^2}$;

(z) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos \alpha x} - \sqrt[m]{\cos \beta x}}{\sin^2 x}$, $(m \neq 0)$.

Cevap:

(a) $\dfrac{-1}{4}$; (b) 4; (c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; (c) $\dfrac{-1}{12}$; (d) $\dfrac{1}{324}$; lllll

(e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$; (f) 1; (g) $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$; (ğ) $\dfrac{1}{2}$; (h) $-\dfrac{9}{128}$;

(ı) 2; (i) 14; (j) $4\sqrt{2}$; (k) $\dfrac{1}{3}$; (l) $\dfrac{1}{24}$;

(m) $\dfrac{1}{p}$; (n) $-\sin a$; (o) $-\dfrac{1}{\sin^2 a}$; (ö) $\dfrac{21}{26}\pi\alpha$; (p) $\dfrac{-3}{2}$;

(r) $\dfrac{-9}{2}$; (s) π; (ș) 0; (t) 0; (u) $-2\sqrt{2}\pi^2$;

(ü) $\ln 2$; (v) 2; (y) $\dfrac{-n(n+1)(2n+1)}{12}$; (z) $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2m}$.

(45) $a > 1,\ \epsilon > 0$ için

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\epsilon} = +\infty$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

(46) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^a}{x-a},\ (a>0)$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{1+x}{x+2}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1+x}{x+2}\Big)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (ç) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\cos x\big)^{\cot^2 x}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(1+xe^x)}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{a^x - a^b}{\sqrt[3]{bx^2} - b},\ (a>0)$; (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - x^\beta}{\sqrt[5]{x} - 1}$;

(ğ) $\displaystyle\lim_{x\to\beta} \Big(\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta\alpha}\Big)^{\frac{1}{x-\beta}},\ (\alpha,\beta \neq k\pi, k\in\mathbb{Z})$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x^2 + \sin^2\pi x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(ı) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \Big(\frac{\cos x}{\cos 3x}\Big)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x}-\pi)^2}}$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (4^x - \sqrt{x+8})^{\tan\frac{\pi x}{2}}$;

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$; (k) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a},\ (a>0)$;

(l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}),\ (x>0)$; (m) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\cos(2\pi(\tfrac{x}{x+1})^a)]^{x^2}$;

(n) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \tan^n[\tfrac{\pi-4}{4} + (1+\tfrac{1}{n})^\alpha]$; (o) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\sin(\ln\sqrt{\cos\tfrac{\pi}{n}})$;

(ö) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} [(\frac{n}{n+1})^\alpha + \sin\tfrac{1}{n}]^n$; (p) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{\cosh(\frac{\pi}{n})}{\cos(\frac{\pi}{n})}\Big)^{n^2}$;

(r) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a})^n,\ (a>0, b>0)$.

Cevap:

(a) $a^a\ln a$; (b) 1 ; (c) $\dfrac{1}{2}$; (ç) $\dfrac{-1}{2}$; (d) 1;

(e) 1; (f) $\dfrac{3a^b\ln a}{2}$; (g) $5(\alpha-\beta)$; (ğ) $e^{\alpha\tan\alpha\beta}$; (h) e^2;

(ı) e^{16} ; (i) $e^{-\frac{2}{\pi}(4\ln 4 - \frac{1}{6})}$; (j) $\dfrac{1}{e}$; (k) $a^a\ln(ae)$ (l) $\ln x$;

(m) $e^{-4\pi^2a^2}$; (n) $e^{2\alpha}$; (o) $-\dfrac{\pi^2}{4}$; (ö) $e^{1-\alpha}$; (p) e^{π^2}; (r) $\sqrt[a]{b}$.

(47) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{2x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$; (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\pi-\mathrm{arccot} x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\arctan\sin^2 x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\alpha x-\sin^2\beta x}{\arctan^2 x+x^3}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[21]{1+\sin 3x}-1+\tan x}{\arcsin x}$; (h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\arctan\frac{2}{x})^x$;

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-}(\tan\frac{\pi x}{4})^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$; (j) $\lim\limits_{n\to\infty} n\arccos\frac{n^2}{n^2+1}$;

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan nx)^{\cot\pi\sqrt{n^2+1}}$, $(x>0)$; (l) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

Cevap:

(a) 2 ; (b) $\dfrac{\pi}{8}$; (c) 1; (d) -1; (e) 3; (f) $\alpha^2-\beta^2$;

(g) $\dfrac{8}{7}$; (h) e^2; (i) $e^{-\frac{\pi}{4}}$; (j) $\sqrt{2}$; (k) $e^{-\frac{4}{\pi^2 x}}$; (l) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(48) Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x\to 0$ iken $\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}.\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\sim -2|x|^{\frac{7}{3}}$ dir.

(b) $x\to 1$ iken $4\sqrt[4]{x}-5\sqrt[5]{x}+1\sim\dfrac{(1-x)^2}{40}$ dır.

(c) $x\to 0$ iken $\arctan x-\arccos\frac{1}{x}\sim\dfrac{1}{2x^3}$ dir.

(49) Aşağıda verilen fonksiyonların sonsuz küçük olması için α ve β ne olmalıdır.

(a) $x\to\infty$ iken $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}-\alpha x-\beta$;

(b) $x\to+\infty$ iken $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$;

(c) $x\to-\infty$ iken $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$;

(d) $x\to+\infty$ iken $f(x)=x\arctan x-\alpha x-\beta$;

(e) $x\to-\infty$ iken $f(x)=x\arctan x-\alpha x-\beta$;

(f) $x \to 0^+$ iken $f(x) = x^\alpha \arctan(\frac{1}{x^\beta})$;

(g) $x \to 0^+$ iken $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$.

Cevap: (a) $\alpha = -1,\ \beta = \dfrac{1}{3}$; (b) $\alpha = 1,\ \beta = 0$; (c) $\alpha = \beta = 0$; (d) $\alpha = \dfrac{\pi}{2},\ \beta = -1$; (e) $\alpha = -\dfrac{\pi}{2},\ \beta = -1$; (f) $\alpha > 0,\ \beta$ herhangi bir reel sayı $\alpha \leq 0, \beta < 0, \alpha > \beta$ (g) $\alpha > \beta$.

(50) Aşağıda verilen fonksiyonların $\varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ ve $\varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)$ limitlerini bulunuz.

(a) $f(x) = e^{\cos(\frac{1}{x^2})}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin^2\frac{1}{x}$;

(c) $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$; (d) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x}$;

(e) $f(x) = \sin \pi x \cos\frac{\pi}{x}$.

Cevap: (a)$\dfrac{1}{e}$ ve e; (b) 0 ve $+\infty$; (c) 0 ve π (d) $-\dfrac{1}{2}$ ve $+\infty$; (e) 0 ve 0.

(51) Aşağıdaki fonksiyonların $\varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)$ ve $\varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)$ limitlerini bulunuz.

(a) $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos^2 x + \arctan x$; (b) $f(x) = \dfrac{1+x+6x^2}{1-x+2x^2}\sin(x^2)$;

(c) $f(x) = (\sqrt{4x^2+x+1} - \sqrt{4x^2-x+1})(1+\cos 2x)$;

(d) $f(x) = (1+\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$; (e) $f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^x \sin^2 x$;

(f) $f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^x + \sin^2 x$; (g) $f(x) = a^2\sin^2(x\sqrt{x}) + \cos^2(x\sqrt{2})$.

Cevap:

(a)$\dfrac{-\pi}{2}$ ve π ; (b) -3 ve 3 ;(c) -1 ve 1; (d) 2 ve e; (e) 0 ve e; (f) e ve $e+1$; (g)$\min\{1, a^2\}$ ve $\max\{1, a^2\}$.